Applications du Logarithme Népérien

Énoncé : Un échantillon initial de 100g de carbone-14, un isotope radioactif utilisé pour la datation au carbone, est étudié. Le carbone-14 se désintègre selon la loi de décroissance radioactive : $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$, où $N(t)$ est la quantité de carbone-14 restante après un temps t, N_0 est la quantité initiale, et λ est la constante de désintégration. On sait que la demi-vie du carbone-14 est de 5730 ans.

Questions

1. Déterminez la valeur de la constante de désintégration λ en années^{-1}.
2. Quelle quantité de carbone-14 restera après 1000 ans ?
3. Après combien de temps la quantité de carbone-14 sera-t-elle réduite à 25% de sa quantité initiale ?
4. Exprimez le temps en fonction de la quantité restante $N(t)$ et de la constante de désintégration λ.
5. Si un artefact contient 10g de carbone-14, quel est son âge estimé, en supposant qu'il n'y a pas eu d'apport supplémentaire de carbone-14 depuis sa formation ?

Corrigé

Question 1

La demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$ est le temps nécessaire pour que la quantité de substance soit réduite de moitié. Donc, $N\left(t_{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}N_0$. On a : $\frac{1}{2}N_0=N_0e^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}}$ $\frac{1}{2}=e^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}}$ En prenant le logarithme népérien des deux côtés : $lnleft\left(\frac{1}{2}\rightarrow\right)=-\lambda t_{\frac{1}{2}}$ $\lambda=-lnleft\left(frac\,\frac{1}{2}\rightarrow\right)t_{\frac{1}{2}}=\frac{\ln(2)}{t_{\frac{1}{2}}}$ Avec $t_{\frac{1}{2}}=5730$ ans :
$\lambda=\frac{\ln(2)}{5730}\approx 1.2097 times\, 10^{-4}\, textannées^{-1}$

Question 2

On utilise la formule de décroissance radioactive : $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$ Avec $N_0=100$g, $t=1000$ ans, et $\lambda\approx 1.2097 times\, 10^{-4}$ années^{-1} :
$N(1000)=100e^{-1.2097 times\, 10^{-4} times\, 1000}\approx 100e^{-0.12097}\approx 100 times\, 0.8869\approx 88.69\, textg$

Question 3

On veut trouver t tel que $N(t)=0.25N_0=\frac{1}{4}N_0$. $\frac{1}{4}N_0=N_0e^{-\lambda t}$ $\frac{1}{4}=e^{-\lambda t}$ En prenant le logarithme népérien des deux côtés : $lnleft(\frac{1}{4}\rightarrow\right)=-\lambda t$ $t=-lnleft\left(frac\,\frac{1}{4}\rightarrow\right)\lambda=\frac{\ln(4)}{\lambda}=\frac{2\ln(2)}{\lambda}$ Avec $\lambda\approx 1.2097 times\,10^{-4}$ années^{-1} : $t\approx\frac{2\ln(2)}{1.2097 times\,10^{-4}}\approx\frac{1.3863}{1.2097 times\,10^{-4}}\approx 11460 textans$ Note : $t=2t_{\frac{1}{2}}=2times\,5730=11460$ ans.

Question 4

On part de $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$ et on prend le logarithme népérien des deux côtés :
$\ln(N(t))=\ln\left(N_0e^{-\lambda t}\right)=\ln\left(N_0\right)+\ln\left(e^{-\lambda t}\right)=\ln\left(N_0\right)-\lambda t$ $\lambda t=\ln\left(N_0\right)-\ln(N(t))=lnleft\left(\frac{N_0}{N(t)}\rightarrow\right)$
$t=\frac{1}{\lambda}lnleft\left(\frac{N_0}{N(t)}\rightarrow\right)$

Question 5

On a $N(t)=10$g, $N_0=100$g, et $\lambda\approx 1.2097 times\,10^{-4}$ années^{-1}.
$t=\frac{1}{\lambda}lnleft\left(\frac{N_0}{N(t)}\rightarrow\right)=\frac{1}{1.2097 times\,10^{-4}}lnleft\left(\frac{100}{10}\rightarrow\right)=\frac{1}{1.2097 times\,10^{-4}}\ln(10)$
$t\approx\frac{2.3026}{1.2097 times\,10^{-4}}\approx 19036 textans$