

# Suites et limites

## Prérequis

Pour aborder ce cours sur les suites et les limites, il est essentiel de maîtriser les notions suivantes acquises au cours des classes précédentes :

- **Nombres réels** : Connaissance des propriétés des nombres réels, des opérations de base (addition, soustraction, multiplication, division) et de la représentation des nombres sur une droite numérique.
- **Fonctions** : Notions de base sur les fonctions, leur représentation graphique et leur vocabulaire (domaine de définition, image, antécédents).
- **Algèbre** : Maîtrise des manipulations algébriques de base (développement, factorisation, résolution d'équations et d'inéquations).
- **Notion d'indice** : Compréhension de l'utilisation des indices pour désigner les éléments d'une suite.
- **Ce cours se situe dans la partie "Nombre et Calcul" du programme de Terminale Générale, après l'étude des fonctions et avant l'introduction au calcul intégral.**

## Chapitre 1 : Introduction aux suites numériques

### Définition d'une suite

Une **suite numérique** est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  (ou une partie de  $\mathbb{N}$ ) et qui associe à chaque entier naturel  $n$  un nombre réel  $u_n$ . On note généralement une suite  $(u_n)$ .

- $n$  est appelé l'**indice** de la suite.
- $u_n$  est appelé le **terme général** de la suite.
- **Exemple** : La suite définie par  $u_n = 2n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  est une suite arithmétique. Les premiers termes de cette suite sont :  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 3$ ,  $u_2 = 5$ ,  $u_3 = 7$ , etc.

### Manières de définir une suite

Il existe plusieurs manières de définir une suite :

- **Par son terme général** : Comme dans l'exemple précédent, on donne une formule explicite pour calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- **Par récurrence** : On donne le premier terme  $u_0$  (ou  $u_1$ ) et une relation de récurrence qui permet de calculer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .

**\*Exemple :\*** La suite de Fibonacci est définie par  $u_0=0$ ,  $u_1=1$  et  $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Chapitre 2 : Suites arithmétiques et géométriques

### Suites arithmétiques

Une suite  $(u_n)$  est dite **arithmétique** s'il existe un nombre réel  $r$  tel que  $u_{n+1}=u_n+r$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Le nombre  $r$  est appelé la **raison** de la suite.

- Le terme général d'une suite arithmétique est donné par :  $u_n = u_0 + nr$ .
- La somme des  $n+1$  premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par :

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

### Suites géométriques

$n \in \mathbb{N}$   
Une suite  $(u_n)$  est dite **géométrique** s'il existe un nombre réel  $q$  tel que  $u_{n+1}=qu_n$  pour tout  $n$ . Le nombre  $q$  est appelé la **raison** de la suite.

- Le terme général d'une suite géométrique est donné par :  $u_n = u_0 q^n$ .
- La somme des  $n+1$  premiers termes d'une suite géométrique est donnée par :  $S_n = u_0 \frac{(1-q^{n+1})}{(1-q)}$  si  $q \neq 1$ .

## Chapitre 3 : Limites d'une suite

### Notion intuitive de limite

On dit qu'une suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$  si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite se rapprochent de plus en plus de  $l$ . On note alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ .

### Définition formelle de la limite

Une suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$  si, pour tout nombre réel  $\epsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n > N$ , on ait  $|u_n - l| < \epsilon$ .

## Chapitre 4 : Opérations sur les limites

### Limites de sommes et de produits

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites convergentes de limites respectives  $l$  et  $l'$ , alors :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = l + l'$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = l \cdot l'$

### Limites de quotients

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites convergentes de limites respectives  $l$  et  $l'$ , avec  $l' \neq 0$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(u_n)}{(v_n)} = \frac{(l)}{(l')}$$

## Chapitre 5 : Suites monotones et bornées

### Suites monotones

$n \in \mathbb{N}$   
 Une suite est dite **croissante** si  $u_{n+1} \geq u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Elle est dite **décroissante** si  $u_{n+1} \leq u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Suites bornées

$n \in \mathbb{N}$   
 Une suite est dite **bornée** s'il existe un nombre réel  $M$  tel que  $|u_n| \leq M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Théorème de la convergence monotone

Toute suite monotone et bornée est convergente.

## Chapitre 6 : Limites et comparaison

### Théorème de comparaison

Si  $u_n \geq v_n$  à partir d'un certain rang et si  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ .

## Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

Si  $u_n \leq v_n \leq w_n$  à partir d'un certain rang et si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = l$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$ .

## Chapitre 7 : Formes indéterminées

### Les formes indéterminées

Certaines expressions impliquant des limites peuvent donner lieu à des **formes indéterminées**, c'est-à-dire des expressions dont la limite ne peut pas être déterminée directement. Les formes indéterminées les plus courantes sont :

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $0 \cdot \infty$
- $\infty - \infty$
- $1^\infty$
- $0^0$
- $\infty^0$

### Méthodes pour lever les formes indéterminées

Pour lever les formes indéterminées, on peut utiliser différentes méthodes, telles que :

- La factorisation
- La multiplication par un conjugué
- Le théorème de comparaison
- La règle de l'Hôpital (qui sera étudiée plus tard)

## Chapitre 8 : Applications des suites et limites

### Intérêt des suites

Les suites sont utilisées pour modéliser de nombreux phénomènes dans des domaines variés tels que :

- La croissance démographique
- L'évolution d'un capital investi
- La décroissance radioactive
- L'approximation de nombres irrationnels

## Exemples d'applications

$$u_n = \frac{(n^2+1)}{(2n^2-3)}$$

**Exemple 1 :** Calculer la limite de la suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)}{(2n^2-3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{(1)}{(n^2)} - \frac{(3)}{(n^2)} = \frac{(1)}{(2)}$$

**Exemple 2 :** Étudier la convergence de la suite  $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{((\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}))}{\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n}} = \frac{(1)}{\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

## Résumé

- Une **suite numérique** est une fonction définie sur  $\mathbb{N}$  (ou une partie de  $\mathbb{N}$ ).
- Une suite **arithmétique** est définie par une raison  $r$ :  $u_{n+1} = u_n + r$ . Son terme général est  $u_n = u_0 + nr$ .
- Une suite **géométrique** est définie par une raison  $q$ :  $u_{n+1} = qu_n$ . Son terme général est  $u_n = u_0 q^n$ .
- La **limite** d'une suite  $(u_n)$  est un nombre  $l$  tel que les termes de la suite se rapprochent de  $l$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.
- Les **opérations sur les limites** permettent de calculer la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de suites.
- Une suite **monotone** est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite **bornée** est une suite dont les termes sont compris entre deux bornes.
- Le **théorème de la convergence monotone** affirme que toute suite monotone et bornée est convergente.
- Le **théorème de comparaison** et le **théorème d'encadrement** permettent de déterminer la limite d'une suite en la comparant à d'autres suites.
- Les **formes indéterminées** sont des expressions dont la limite ne peut pas être déterminée directement.
- Les suites et les limites sont utilisées pour modéliser de nombreux phénomènes dans des domaines variés.

From: <https://www.wikiprof.fr/> - **wikiprof.fr**

Permanent link: [https://www.wikiprof.fr/doku.php?id=cours:lycee:generale:terminale\\_generale:mathematiques:suites\\_et\\_limites&rev=1751925811](https://www.wikiprof.fr/doku.php?id=cours:lycee:generale:terminale_generale:mathematiques:suites_et_limites&rev=1751925811)

Last update: **2025/07/08 00:03**

