Suites et limites

Prérequis

Pour aborder ce cours sur les suites et les limites, il est essentiel de maîtriser les notions suivantes acquises au cours des classes précédentes :

- **Nombres réels :** Connaissance des propriétés des nombres réels, des opérations de base (addition, soustraction, multiplication, division) et des inégalités.
- **Fonctions :** Notions de base sur les fonctions, leur représentation graphique et leur vocabulaire (domaine de définition, image, antécédents).
- **Algèbre :** Maîtrise des manipulations algébriques de base (factorisation, développement, résolution d'équations du premier et du second degré).
- **Suites numériques (introduction) :** Une première approche des suites numériques en seconde, notamment la notion de terme général et de suite arithmétique et géométrique.

Ce cours s'inscrit dans la progression des chapitres de l'année de terminale, généralement après l'étude des fonctions et avant l'introduction au calcul intégral. Il constitue une base solide pour les études supérieures en mathématiques, en sciences de l'ingénieur et dans d'autres disciplines scientifiques.

Chapitre 1 : Introduction aux suites numériques

Définition d'une suite numérique

Une **suite numérique** est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels ($mathbbN$) ou une partie de celui-ci, à valeurs dans l'ensemble des nombres réels ($mathbbR$). On la note généralement $\left(u_n\right)$ où n est l'indice et u_n est le terme général de la suite.

Exemple : La suite définie par $u_n=2n+1$ pour tout $n \in mathbbN$ est une suite numérique dont les premiers termes sont : $u_0=1$, $u_1=3$, $u_2=5$, $u_3=7$, etc.

Manières de définir une suite

Il existe plusieurs manières de définir une suite :

- **Par son terme général :** Comme dans l'exemple ci-dessus, on donne une formule explicite pour calculer u_n en fonction de n.
- **Par récurrence :** On donne le premier terme u_0 (ou u_1) et une relation de récurrence qui permet de calculer u_{n+1} en fonction de u_n.

Exemple : La suite de Fibonacci est définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ pour tout $n \in mathbbN$.

Représentation graphique d'une suite

On peut représenter graphiquement une suite en plaçant les points de coordonnées $\left(n, u_n\right)$ dans un repère.

Chapitre 2 : Suites arithmétiques et géométriques

Suites arithmétiques

Une **suite arithmétique** est une suite dont chaque terme est obtenu en ajoutant une constante, appelée **raison** (notée r), au terme précédent. On a donc $u_{n+1}=u_n+r$ pour tout $n \in mathbbN$.

Formule du terme général : $u_n=u_0+nr$

Exemple : La suite définie par $u_n=3n+2$ est une suite arithmétique de raison $r=3$ et de premier terme $u_0=2$.

Suites géométriques

Une **suite géométrique** est une suite dont chaque terme est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante, appelée **raison** (notée q). On a donc $u_{n+1}=qu_n$ pour tout $n \in mathbbN$.

Formule du terme général : $u_n=u_0q^n$

Exemple : La suite définie par $u_n=5.2^n$ est une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $u_0=5$.

Chapitre 3 : Limites d'une suite

Notion intuitive de limite

On dit qu'une suite $\left(u_n\right)$ converge vers une limite l si les termes de la suite se rapprochent de plus en plus de l lorsque n devient de plus en plus grand. On note alors $\lim_{-} n \to \infty u_n=l$.

Définition formelle de la limite

Pour définir rigoureusement la limite d'une suite, on utilise la notion d'epsilon. On dit que

$N \lim_{n\to\infty} u_n = l$ si, pour tout $\epsilon>0$, il existe un entier tel que pour tout $n>N$, on ait $|u_n - l| < \epsilon$.

Suites convergentes, divergentes et non définies

- **Suite convergente :** Une suite qui admet une limite finie.
- **Suite divergente :** Une suite qui n'admet pas de limite finie. Elle peut tendre vers l'infini (positivement ou négativement) ou osciller.
- **Suite indéfinie :** Une suite dont le comportement est imprévisible.

Chapitre 4 : Opérations sur les limites

Limites de sommes, produits et quotients

Si $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont deux suites convergentes de limites respectives l et l, alors :

- $\lim_{n\to\infty}\left(u_n+v_n\right)=l+l$
- $\lim_{n\to\infty}\left(u_n . v_n\right)=l.l$
- Si l, alors $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(u_n\right)}{\left(v_n\right)}=(l)/$

Théorème de comparaison

Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, et si $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = l$, alors $l \leqslant l$.

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang, et si $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = l$, alors $\lim_{n\to\infty} v_n = l$.

Chapitre 5 : Suites monotones et limites

Suites croissantes et décroissantes

- **Suite croissante :** Une suite $\left(u_n\right)$ est croissante si $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \in mathbb N$.
- **Suite décroissante :** Une suite $\left(u_n\right)$ est décroissante si $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in mathbb N$.

Théorème de la limite monotone

- Si une suite $\left(u_n\right)$ est croissante et majorée, alors elle converge vers une limite finie.
- Si une suite $\left(u_n\right)$ est décroissante et minorée, alors elle converge vers une limite finie.

Chapitre 6 : Limites et applications

Calcul de limites de suites

On utilise les théorèmes et les propriétés étudiés précédemment pour calculer les limites de suites.

Exemple : Soit $u_n=\frac{(2n+1)}{(n+3)}$. On a $\lim_{-} n \to \infty u_n = \lim_{-} n \to \infty 2 + frac \frac{(1)}{(n)} 1 + \frac{(3)}{(n)} = \frac{(2)}{(1)} = 2$.

Applications des limites de suites

Les limites de suites sont utilisées dans de nombreux domaines des mathématiques, notamment pour définir la notion de continuité d'une fonction, pour calculer des intégrales et pour étudier la convergence de séries.

Résumé

- **Suite numérique :** Fonction définie sur $mathbbN$ à valeurs dans $mathbbR$.
- **Suite arithmétique :** $u_{n+1}=u_n+r$, $u_n=u_0+nr$.
- **Suite géométrique :** $u_{n+1}=qu_n$, $u_n=u_0q^n$.
- **Limite d'une suite :** Valeur vers laquelle les termes de la suite tendent lorsque n devient de plus en plus grand.
- **Suite convergente :** Suite qui admet une limite finie.
- **Suite divergente :** Suite qui n'admet pas de limite finie.
- **Opérations sur les limites :** Somme, produit, quotient.
- **Théorème de comparaison :** Si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim_{-} n \to \infty u_n = \lim_{-} n \to \infty v_n = l$, alors $l \leqslant l$.
- **Théorème d'encadrement :** Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $\lim_{-} n \to \infty u_n = \lim_{-} n \to \infty w_n = l$, alors $\lim_{-} n \to \infty v_n = l$.
- **Suite croissante :** $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- **Suite décroissante :** $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- **Théorème de la limite monotone :** Une suite croissante et majorée converge. Une suite décroissante et minorée converge.