Limites de fonction

Prérequis

Pour aborder ce cours sur les limites de fonctions, il est essentiel de maîtriser les notions suivantes acquises en classes précédentes :

- **Fonctions :** Définition d'une fonction, notion de variable, image et antécédent.
- **Représentation graphique :** Savoir lire et interpréter un graphique de fonction.
- **Algèbre :** Maîtrise des opérations algébriques de base (factorisation, développement, simplification).
- **Nombres réels :** Connaissance des propriétés des nombres réels (inégalités, intervalles).
- **Suites numériques :** Notions de base sur les suites numériques et leur convergence (notamment en première).

Ce cours s'inscrit dans la partie “Fonctions” du programme de Terminale Générale, après l'étude des fonctions de référence et des transformations de fonctions. Il prépare aux notions d'étude de fonctions plus approfondies et aux applications en physique et en sciences de l'ingénieur.

Chapitre 1 : Introduction aux limites

Définition intuitive d'une limite

L'idée de limite est fondamentale en analyse. Intuitivement, la limite d'une fonction $f(x)$ lorsque x tend vers a est la valeur vers laquelle $f(x)$ se rapproche de plus en plus lorsque x se rapproche de a, sans nécessairement atteindre cette valeur.

Exemple : Considérons la fonction $f(x)=\frac{(x^2-1)}{(x-1)}$. On peut remarquer que $f(1)$ n'est pas définie. Cependant, lorsque x se rapproche de 1, $f(x)$ se rapproche de 2. On dit que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 est 2.

Notation de la limite

On écrit : $lim_{x\to a}f(x)=L$, ce qui signifie que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est L.

Limites finies et infinies

- **Limite finie :** La limite est un nombre réel L.
- **Limite infinie :** La limite est l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$). Cela signifie que la fonction croît ou décroît indéfiniment lorsque x se rapproche de a.

Chapitre 2 : Limites à gauche et à droite

Définition des limites unilatérales

Pour que la limite d'une fonction existe en un point a, il est nécessaire que les limites à gauche et à droite en ce point existent et soient égales.

- **Limite à gauche :** lim_{-} (on se rapproche de a par des valeurs inférieures à a).
- **Limite à droite :** $lim_{x \to a^{+}} f(x)$ (on se rapproche de a par des valeurs supérieures à a).

Existence de la limite

La limite $lim_{x \to a} f(x)$ existe si et seulement si lim_{-}. Dans ce cas, $lim_{x \to a} f(x) = lim_{-}$.

Exemple : Soit $f(x) = begincases x \& si x < 1\ 2 \& si x = 1\ x+1 \& si x > 1 endcases$. lim_{-} et $lim_{x \to 1^{+}} f(x) = 2$. La limite $lim_{x \to 1} f(x)$ n'existe pas.

Chapitre 3 : Formes indéterminées

Identification des formes indéterminées

Certaines expressions conduisent à des formes indéterminées, c'est-à-dire des expressions dont la limite ne peut être déterminée directement. Les formes indéterminées les plus courantes sont :

- $\frac{(0)}{(0)}$
- $\frac{(\infty)}{(\infty)}$
- $0 . \infty$
- $\infty - \infty$
- 0^{0}
- 1^{∞}

Méthodes de lever les formes indéterminées

Pour lever une forme indéterminée, on peut utiliser différentes techniques :

- **Factorisation :** Simplifier l'expression en factorisant le numérateur et le dénominateur.
- **Conjuguée :** Multiplier par la conjuguée pour éliminer les racines carrées.
- **Développement :** Développer l'expression pour simplifier.
- **Règle de l'Hôpital :** (Non au programme de Terminale Générale)

Chapitre 4 : Limites de sommes, produits et quotients

Limites de sommes et de produits

Si $lim_{x\to a}f(x)=L_1$ et $lim_{x\to a}g(x)=L_2$, alors :

- $lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=L_1+L_2$
- $lim_{x\to a}(f(x).g(x))=L_1.L_2$

Limite d'un quotient

Si $lim_{x\to a}f(x)=L_1$ et $lim_{x\to a}g(x)=L_2\neq 0$, alors :

$$lim_{x\to a}\frac{(f(x))}{(g(x))}=\frac{(L_1)}{(L_2)}$$

Chapitre 5 : Limites et inégalités

Théorème de comparaison (encadrement)

Si $f(x)\leqslant g(x)$ au voisinage de a et si $lim_{x\to a}f(x)=L$ et $lim_{x\to a}g(x)=L$, alors $lim_{x\to a}f(x)=lim_{x\to a}g(x)=L$.

Théorème des gendarmes (encadrement)

Si $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ au voisinage de a et si $lim_{x\to a}f(x)=lim_{x\to a}h(x)=L$, alors $lim_{x\to a}g(x)=L$.

Chapitre 6 : Limites infinies et asymptotes

Limites infinies

Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers a, on dit que $f(x)$ a une limite infinie en a.

Asymptotes verticales

Si $lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$, alors la droite $x=a$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de

$f(x)$.

Asymptotes horizontales

Si $lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$, alors la droite $y = L$ est une asymptote horizontale de la courbe représentative de $f(x)$.

Chapitre 7 : Limites trigonométriques

Limites usuelles

- $lim_{x \to 0} \frac{(\sin(x))}{(x)} = 1$
- $lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos(x))}{(x)} = 0$

Ces limites sont fondamentales pour le calcul de nombreuses autres limites impliquant des fonctions trigonométriques.

Chapitre 8 : Applications et exercices

Exercice 1 :

Calculer la limite suivante : $lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 4)}{(x - 2)}$.

Corrigé :

$lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 4)}{(x - 2)} = lim_{x \to 2} \frac{((x - 2)(x + 2))}{(x - 2)} = lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$.

Exercice 2 :

Calculer la limite suivante : $lim_{x \to 0} \frac{(\sin(3x))}{(x)}$.

Corrigé :

$lim_{x \to 0} \frac{(\sin(3x))}{(x)} = lim_{x \to 0} 3 . \frac{(\sin(3x))}{(3x)} = 3 . 1 = 3$.

Résumé

- **Limite d'une fonction :** Valeur vers laquelle une fonction tend lorsque sa variable se rapproche d'une valeur donnée.
- **Limite finie :** $lim_{x \to a} f(x) = L$, où L est un nombre réel.
- **Limite infinie :** $lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.
- **Limites à gauche et à droite :** lim_{-} et $lim_{x \to a^{+}} f(x)$.
- **Formes indéterminées :** $\frac{(0)}{(0)}$, $\frac{(\infty)}{(\infty)}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$, 0^{0}, 1^{∞}.
- **Théorème de comparaison :** Si $f(x) \leqslant g(x)$ et $lim_{x \to a} f(x) = lim_{x \to a} g(x) = L$, alors $lim_{x \to a} f(x) = L$.
- **Théorème des gendarmes :** Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et $lim_{x \to a} f(x) = lim_{x \to a} h(x) = L$, alors $lim_{x \to a} g(x) = L$.
- **Asymptotes verticales :** Droites $x = a$ telles que $lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.
- **Asymptotes horizontales :** Droites $y = L$ telles que $lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$.
- **Limites trigonométriques usuelles :** $lim_{x \to 0} \frac{(\sin(x))}{(x)} = 1$ et $lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos(x))}{(x)} = 0$.