Limites de fonction

Prérequis

Pour aborder ce cours sur les limites de fonctions, il est essentiel de maîtriser les notions suivantes acquises en classes précédentes :

- **Fonctions :** Définition d'une fonction, notion de variable, image et antécédent.
- **Représentation graphique :** Savoir lire et interpréter un graphique de fonction.
- **Algèbre :** Maîtrise des opérations algébriques de base (factorisation, développement, simplification).
- **Nombres réels :** Connaissance des propriétés des nombres réels (inégalités, intervalles).
- **Suites numériques :** Notions de base sur les suites numériques et leur convergence (notamment en première).

Ce cours s'inscrit dans la partie “Fonctions” du programme de Terminale Générale, après l'étude des fonctions de référence et des transformations de fonctions. Il prépare aux notions d'étude de fonctions plus approfondies et aux applications en physique et en sciences de l'ingénieur.

Chapitre 1 : Introduction aux limites

1.1 Notion intuitive de limite

L'idée de limite est fondamentale en analyse. Intuitivement, la limite d'une fonction $f(x)$ lorsque x tend vers a est la valeur vers laquelle la fonction semble se rapprocher lorsque x se rapproche de a. Il est important de noter que la fonction n'a pas nécessairement besoin d'être définie en $x=a$ pour qu'une limite existe.

Exemple : Considérons la fonction $f(x)=\frac{(x^2-1)}{(x-1)}$. Cette fonction n'est pas définie en $x=1$. Cependant, pour x proche de 1 (mais différent de 1), $f(x)$ se rapproche de 2. On dit que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 est 2.

1.2 Notation et définition

On écrit $lim_{x \to a} f(x)=L$ pour dire que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est L. Cette notation signifie que pour tout intervalle ouvert contenant L, il existe un intervalle ouvert contenant a tel que pour tout x dans cet intervalle (sauf éventuellement $x=a$), $f(x)$ est dans l'intervalle contenant L.

Chapitre 2 : Limites finies

2.1 Calcul de limites simples

Pour calculer des limites simples, on peut souvent utiliser des manipulations algébriques :

- **Substitution directe :** Si $f(x)$ est continue en a, alors $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- **Factorisation :** Pour les fonctions rationnelles, on peut factoriser le numérateur et le dénominateur pour simplifier l'expression et éliminer les indéterminations.
- **Rationalisation :** Pour les fonctions contenant des racines carrées, on peut rationaliser le numérateur ou le dénominateur.

Exemple : $lim_{x \to 2} \left(x^2 + 3x - 1 \right) = 2^2 + 3.2 - 1 = 9$.

2.2 Formes indéterminées

Certaines expressions conduisent à des formes indéterminées, telles que $\frac{(0)}{(0)}$ ou $\frac{(\infty)}{(\infty)}$. Dans ces cas, des manipulations algébriques plus poussées sont nécessaires.

Chapitre 3 : Limites infinies

3.1 Limites infinies à l'infini

Lorsque x devient très grand (positif ou négatif), la fonction peut tendre vers l'infini. On écrit $lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ou $lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

3.2 Limites infinies en un point

Lorsque x s'approche d'un point a, la fonction peut tendre vers l'infini. On écrit $lim_{x \to a} f(x) = \infty$ ou $lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Chapitre 4 : Limites et continuité

4.1 Définition de la continuité

Une fonction $f(x)$ est continue en un point a si et seulement si :

1. $f(a)$ est définie.
2. $lim_{x \to a} f(x)$ existe.
3. $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

4.2 Conséquences de la continuité

Les fonctions continues possèdent des propriétés importantes, telles que le théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

Chapitre 5 : Théorème des gendarmes

5.1 Énoncé du théorème

Si $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ sont des fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ pour tout x dans un intervalle ouvert contenant a (sauf éventuellement en a), et si $lim_{x \to a} f(x) = lim_{x \to a} h(x) = L$, alors $lim_{x \to a} g(x) = L$.

5.2 Applications

Le théorème des gendarmes est utile pour calculer des limites de fonctions qui ne peuvent pas être traitées directement.

Chapitre 6 : Limites et comparaison

6.1 Ordre de grandeur

Comparer les ordres de grandeur de différentes fonctions permet de déterminer leur comportement asymptotique.

6.2 Utilisation des limites pour comparer les fonctions

On peut utiliser les limites pour déterminer quelle fonction croît le plus rapidement lorsque x tend vers l'infini.

Chapitre 7 : Applications aux fonctions rationnelles

7.1 Étude des asymptotes verticales

Les asymptotes verticales se trouvent aux points où le dénominateur d'une fonction rationnelle s'annule et le numérateur ne s'annule pas.

7.2 Étude des asymptotes horizontales

Les asymptotes horizontales se trouvent en calculant les limites de la fonction lorsque x tend vers l'infini ou moins l'infini.

Chapitre 8 : Exercices et problèmes

8.1 Exercice 1

Calculer la limite suivante : $lim_{x \to 3} \frac{\left(x^2 - 9\right)}{(x - 3)}$.

Corrigé : $lim_{x \to 3} \frac{\left(x^2 - 9\right)}{(x - 3)} = lim_{x \to 3} \frac{((x - 3)(x + 3))}{(x - 3)} = lim_{x \to 3} (x + 3) = 6$.

8.2 Exercice 2

Calculer la limite suivante : $lim_{x \to \infty} \frac{\left(2x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 3\right)}$.

Corrigé : $lim_{x \to \infty} \frac{\left(2x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 3\right)} = lim_{x \to \infty} 2 + frac \frac{(1)}{\left(x^2\right)} 1 - \frac{(3)}{\left(x^2\right)} = \frac{(2 + 0)}{(1 - 0)} = 2$.

Résumé

- **Limite d'une fonction :** La valeur vers laquelle une fonction tend lorsque sa variable s'approche d'une certaine valeur.
- **Limite finie :** $lim_{x \to a} f(x) = L$, où L est un nombre réel.
- **Limite infinie :** $lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ ou $lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$.
- **Continuité :** Une fonction est continue en un point si elle est définie en ce point, si sa limite existe en ce point, et si la limite est égale à la valeur de la fonction en ce point.
- **Théorème des gendarmes :** Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et $lim_{x \to a} f(x) = lim_{x \to a} h(x) = L$, alors

$lim_{x \to a} g(x) = L$.

- **Formes indéterminées :** Expressions telles que $\frac{(0)}{(0)}$ ou $\frac{(\infty)}{(\infty)}$ qui nécessitent des manipulations algébriques pour être résolues.
- **Asymptotes :** Droites auxquelles la fonction se rapproche infiniment.
- **Calcul de limites :** Utilisation de factorisation, rationalisation, substitution directe, et théorème des gendarmes.