La fonction exponentielle

Prérequis

Avant d'aborder la fonction exponentielle, il est indispensable de maîtriser les notions suivantes vues dans les classes antérieures :

- Les propriétés des puissances (entières et rationnelles).
- La fonction logarithme népérien (ln).
- La dérivation des fonctions usuelles.
- La résolution d'équations et d'inéquations.

Ce cours sur la fonction exponentielle se situe généralement vers le début de l'année de Terminale Générale en mathématiques. Il fait suite à l'étude de la fonction logarithme népérien et précède souvent l'étude des nombres complexes et des équations différentielles. Il permet de consolider les compétences en analyse et de préparer à des applications plus complexes.

Définition et propriétés fondamentales

Définition de la fonction exponentielle

La **fonction exponentielle**, notée exp, est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $\exp'(x)=\exp(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- $\exp(0)=1$.

Une notation courante pour $\exp(x)$ est e^x, où e est le nombre d'Euler (ou constante de Néper), approximativement égal à 2.71828. On a donc $\exp(1)=e\approx 2.718$.

- *Question de réflexion :* ***Pourquoi est-il important que la fonction exponentielle soit l'unique fonction avec ces propriétés ? ==== Propriétés algébriques ==== La fonction exponentielle possède des propriétés algébriques essentielles : * Pour tous réels a et b, $\exp(a+b)=\exp(a).\exp(b)$, soit $e^{a+b}=e^a.e^b$. * Pour tout réel a, $\exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)}$, soit $e^{-a}=\frac{1}{e^a}$. * Pour tous réels a et b, $\exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$, soit $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$. * Pour tout réel a et tout entier relatif n, $\exp(na)=(\exp(a))^n$, soit $e^{na}=\left(e^a\right)^n$. * Exemple : Simplifiez l'expression $e^{2x}.e^{-x+1}$. $e^{2x}.e^{-x+1}=e^{2x+(-x+1)}=e^{x+1}$. ==== Lien avec le logarithme népérien ==== La fonction exponentielle est la réciproque de la fonction logarithme népérien (ln). Cela signifie que : * Pour tout réel x, $\ln(\exp(x))=x$, soit $\ln\left(e^x\right)=x$. * Pour tout réel $x>0$, $\exp(\ln(x))=x$, soit $e^{\ln(x)}=x$. Cette propriété est fondamentale pour résoudre des équations impliquant des exponentielles et des logarithmes. * Exemple***

: Résolvez l'équation $e^x=5$. En appliquant la fonction logarithme népérien aux deux membres, on obtient : $\ln\left(e^x\right)=\ln(5)$, soit $x=\ln(5)$. ===== Étude de la fonction exponentielle ===== ==== Variations et limites ==== La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus : * $\lim_{} x to -\infty e^x=0$. * $\lim_{} x to +\infty e^x=+\infty$. * Question de réflexion : Comment ces limites se traduisent-elles graphiquement ? ==== Dérivée et convexité ==== La dérivée de la fonction exponentielle est elle-même : $(\exp(x))'=\exp(x)$. La dérivée seconde est aussi $\exp(x)$, qui est positive sur $\mathbb{R}$. Cela signifie que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. ==== Représentation graphique ==== La courbe représentative de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de l'axe des abscisses (car $e^x>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$). Elle passe par le point de coordonnées (0, 1) et sa pente en ce point est égale à 1. La courbe s'approche de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $-\infty$ (asymptote horizontale). ===== Applications de la fonction exponentielle ===== ==== Modèles d'évolution ==== La fonction exponentielle est utilisée pour modéliser de nombreux phénomènes d'évolution, tels que : * La croissance d'une population (bactéries, animaux). * La désintégration radioactive. * L'évolution d'un capital à intérêts composés. * La charge et la décharge d'un condensateur dans un circuit RC. * Exemple : Une population de bactéries double toutes les heures. Si la population initiale est de 1000 bactéries, quelle sera la population après 5 heures ? Soit $P(t)$ la population au temps t (en heures). On a $P(t)=P_0.e^{kt}$, où P_0 est la population initiale et k est le taux de croissance. Comme la population double toutes les heures, $P(1)=2P_0$. Donc, $2P_0=P_0.e^k$, ce qui implique $e^k=2$ et $k=\ln(2)$. Après 5 heures, la population sera $P(5)=1000.e^{5.\ln(2)}=1000.e^{\ln\left(2^5\right)}=1000.2^5=1000.32=32000$ bactéries. ==== Équations différentielles ==== La fonction exponentielle est une solution fondamentale de l'équation différentielle $y'=ky$, où k est une constante réelle. Les solutions de cette équation sont de la forme $y(x)=Ce^{kx}$, où C est une constante arbitraire. * Exemple : Trouvez la solution de l'équation différentielle $y'=2y$ telle que $y(0)=3$. La solution générale est de la forme $y(x)=Ce^{2x}$. Pour déterminer la constante C, on utilise la condition initiale $y(0)=3$. Donc, $3=Ce^{2.0}=C.e^0=C$. Ainsi, $C=3$ et la solution est $y(x)=3e^{2x}$. ==== Probabilités et statistiques ==== La fonction exponentielle intervient dans de nombreuses lois de probabilité, notamment la loi exponentielle, qui modélise la durée de vie sans vieillissement (par exemple, la durée de fonctionnement d'un appareil). ===== Croissances comparées et compléments ===== ==== Croissances comparées ==== Il est important de connaître les croissances comparées des fonctions exponentielle, puissance et logarithme : * $\lim_{} x to +\infty \frac{e^x}{x^n}=+\infty$ pour tout entier n. La fonction exponentielle croît plus vite que toute fonction puissance. * $\lim_{} x to +\infty \frac{\ln(x)}{x^n}=0$ pour tout entier $n>0$. La fonction logarithme croît moins vite que toute fonction puissance. * $\lim_{} x to 0 x.\ln(x)=0$. *

Exemple : Calculez la limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$. D'après les croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$. ==== Forme exponentielle complexe ==== Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, où x et y sont des réels et i est l'unité imaginaire ($i^2 = -1$), on définit l'exponentielle complexe par : $e^z = e^{x+iy} = e^x.(\cos(y) + i\sin(y))$. Cette définition, connue sous le nom de formule d'Euler, relie l'exponentielle complexe aux fonctions trigonométriques. * Exemple : Exprimez $e^{i\pi}$ sous forme algébrique. $e^{i\pi} = e^{0+i\pi} = e^0.(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 1.(-1 + i.0) = -1$. ===== Résumé ===== * Fonction exponentielle : Unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$. Notée aussi e^x. * Propriétés algébriques : * $e^{a+b} = e^a.e^b$ * $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ * $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ * $e^{na} = \left(e^a\right)^n$ * Lien avec le logarithme népérien : * $\ln\left(e^x\right) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ * $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$ * Variations et limites : * Strictement croissante sur $\mathbb{R}$ * $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ * $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ * Dérivée : $(\exp(x))' = \exp(x)$ * Croissances comparées : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ * Formule d'Euler : $e^{x+iy} = e^x.(\cos(y) + i\sin(y))$ ===== Évaluation QCM ===== * Question: La fonction exponentielle est : * (Correct) Strictement croissante sur $\mathbb{R}$ * Strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ * Nulle en $x = 0$ Explication: La fonction exponentielle est toujours strictement croissante et vaut 1 en $x = 0$. * Question: Quelle est la dérivée de $f(x) = e^{3x}$? * (Correct) $3e^{3x}$ * e^{3x} * e^3 Explication: La dérivée de $e^{u(x)}$ est $u'(x)e^{u(x)}$. Ici, $u(x) = 3x$, donc $u'(x) = 3$. * Question: Quelle est la valeur de $e^{\ln(7)}$? * (Correct) 7 * e * $\ln(e)$ Explication: Par définition, $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$. * Question: Simplifiez l'expression $e^x.e^{-2x}$. * (Correct) e^{-x} * e^{-2x^2} * e^{-x^2} Explication: $e^x.e^{-2x} = e^{x-2x} = e^{-x}$. * Question: Quelle est la limite de e^x quand x tend vers $-\infty$? * (Correct) 0 * $+\infty$ * 1 Explication: $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$. * Question: La fonction exponentielle est-elle paire, impaire ou ni l'un ni l'autre ? * (Correct) Ni l'un ni l'autre * Paire * Impaire Explication: $e^{-x} notequal e^x$ et $e^{-x} notequal - e^x$. * Question: Quelle est la solution de l'équation $e^x = 1$? * (Correct) $x = 0$ * $x = 1$ * $x = e$ Explication: $e^0 = 1$. * Question: La fonction exponentielle est-elle convexe ? * (Correct) Oui * Non * Seulement sur $\mathbb{R}^+$ Explication: La dérivée seconde de la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$. * Question: Si $e^x = 2$ et $e^y = 3$, que vaut e^{x+y} ? * (Correct) 6 * 5 * e^5 Explication: $e^{x+y} = e^x.e^y = 2.3 = 6$. * Question: Quelle est la limite de $\frac{e^x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$? * (Correct) $+\infty$ * 0 * 1 Explication:** D'après les croissances comparées, la fonction exponentielle croît plus vite que la fonction identité.