Thalès

Prérequis

Pour aborder ce cours sur le théorème de Thalès, il est essentiel de maîtriser les notions suivantes vues en classes précédentes :

- **Calculs de proportions :** Savoir résoudre des équations simples et utiliser les règles de trois.
- **Notion d'angle :** Identifier et mesurer des angles, notamment les angles correspondants et alternes-internes formés par des droites parallèles et une sécante.
- **Vocabulaire géométrique de base :** Connaître les définitions de droite, segment, point, angle, triangle.
- **Calcul d'aires et de périmètres :** Savoir calculer l'aire et le périmètre de figures simples comme les triangles et les rectangles.

Ce cours s'inscrit dans le chapitre de géométrie du programme de quatrième, après l'étude des triangles et des propriétés des droites parallèles. Il prépare les élèves à l'étude des triangles semblables et à l'application du théorème de Thalès dans des contextes plus complexes.

Chapitre 1 : Introduction au théorème de Thalès

1.1 Configurations géométriques et vocabulaire

Le théorème de Thalès s'applique à une configuration géométrique particulière : deux droites parallèles coupées par deux sécantes.

Définition : Une **sécante** est une droite qui coupe deux autres droites.

Considérons deux droites parallèles (D1) et (D2) coupées par deux sécantes (S1) et (S2). Les points d'intersection de ces droites créent des segments de droite.

1.2 Le théorème de Thalès : énoncé et illustration

Le **théorème de Thalès** établit une relation entre les longueurs des segments formés sur les sécantes par les droites parallèles.

Théorème de Thalès : Si deux droites parallèles coupent deux sécantes, alors les longueurs des segments correspondants sur ces sécantes sont proportionnelles.

Plus précisément, si (D1) et (D2) sont parallèles, et (S1) et (S2) sont des sécantes, alors :

$$\frac{(AI)}{(AJ)}=\frac{(BI)}{(BJ)}=\frac{(CI)}{(CJ)}$$

Où A, B, C sont des points sur (S1) et I, J, K sont des points sur (S2), et (D1) passe par A, B, C et (D2) passe par I, J, K.

Exemple : Soit (D1) et (D2) deux droites parallèles coupées par les sécantes (S1) et (S2). On a AI = 2 cm, AJ = 3 cm, BI = 4 cm. On cherche BJ.

En appliquant le théorème de Thalès :

$\frac{(AI)}{(AJ)}=\frac{(BI)}{(BJ)}$

$\frac{(2)}{(3)}=\frac{(4)}{(BJ)}$

$2.BJ=3.4$

$BJ=\frac{(12)}{(2)}=6$ cm

1.3 Application simple : calcul de longueurs

Le théorème de Thalès permet de calculer une longueur inconnue dans une configuration donnée, à condition de connaître les autres longueurs.

Exercice 1 :

Soit (D1) et (D2) deux droites parallèles coupées par les sécantes (S1) et (S2). On a AI = 5 cm, AJ = 8 cm, BI = 7,5 cm. Calculer BJ.

Corrigé :

$\frac{(AI)}{(AJ)}=\frac{(BI)}{(BJ)}$

$\frac{(5)}{(8)}=\frac{(7,5)}{(BJ)}$

$5.BJ=8.7,5$

$BJ=\frac{(60)}{(5)}=12$ cm

Chapitre 2 : La réciproque du théorème de Thalès

2.1 Introduction à la réciproque

La **réciproque** d'un théorème est une affirmation qui inverse l'hypothèse et la conclusion du théorème original. Si le théorème original est vrai, sa réciproque ne l'est pas forcément.

2.2 Énoncé et illustration de la réciproque du théorème de Thalès

Réciproque du théorème de Thalès : Si deux sécantes sont coupées par deux segments qui sont proportionnels, alors les droites qui relient les extrémités de ces segments sont parallèles.

Plus précisément, si $\frac{(AI)}{(AJ)}=\frac{(BI)}{(BJ)}$, alors (AB) est parallèle à (IJ).

Exemple : Soit A, B, I, J des points tels que $\frac{(AI)}{(AJ)}=\frac{(BI)}{(BJ)}=\frac{(2)}{(3)}$. Alors (AB) est parallèle à (IJ).

2.3 Application : démontrer que deux droites sont parallèles

La réciproque du théorème de Thalès est un outil puissant pour démontrer que deux droites sont parallèles.

Exercice 2 :

Soit A, B, C, D des points tels que $\frac{(AC)}{(AD)}=\frac{(AE)}{(AF)}=\frac{(3)}{(5)}$. Démontrer que (CE) est parallèle à (DF).

Corrigé :

On a $\frac{(AC)}{(AD)}=\frac{(AE)}{(AF)}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, (CE) est parallèle à (DF).

Chapitre 3 : Applications et pièges courants

3.1 Utilisation du théorème de Thalès dans des triangles

Le théorème de Thalès peut être utilisé pour démontrer que deux triangles sont semblables. Si deux triangles ont un angle commun et les côtés adjacents à cet angle sont proportionnels, alors les triangles sont semblables.

3.2 Pièges courants et erreurs à éviter

- **Confondre les longueurs des segments :** Il est crucial d'identifier correctement les segments correspondants sur les sécantes.
- **Oublier la réciproque :** Ne pas utiliser la réciproque du théorème de Thalès lorsque l'on doit démontrer que deux droites sont parallèles.
- **Ne pas respecter l'ordre des termes dans la proportion :** L'ordre des termes dans la proportion est important.

3.3 Exercice d'application complexe

Soit un triangle ABC. Un point D est situé sur le segment [AB] et un point E est situé sur le segment [AC] tels que AD = 4 cm, DB = 6 cm, AE = 5 cm.

1. Calculer la longueur de EC.
2. Démontrer que (DE) est parallèle à (BC).

Corrigé :

1. D'après le théorème de Thalès : $\frac{(AD)}{(AB)}=\frac{(AE)}{(AC)}$

$\frac{(4)}{(4+6)}=\frac{(5)}{(AC)}$

$\frac{(4)}{(10)}=\frac{(5)}{(AC)}$

$4.AC=10.5$

$AC=\frac{(50)}{(4)}=12,5$ cm

$EC=AC-AE=12,5-5=7,5$ cm

1. On a $\frac{(AD)}{(AB)}=\frac{(AE)}{(AC)}=\frac{(4)}{(10)}=\frac{(2)}{(5)}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, (DE) est parallèle à (BC).

Résumé

- **Théorème de Thalès :** Si deux droites parallèles coupent deux sécantes, alors les longueurs des segments correspondants sur ces sécantes sont proportionnelles. $\frac{(AI)}{(AJ)}=\frac{(BI)}{(BJ)}=\frac{(CI)}{(CJ)}$
- **Réciproque du théorème de Thalès :** Si deux sécantes sont coupées par deux segments qui sont proportionnels, alors les droites qui relient les extrémités de ces segments sont parallèles. Si $\frac{(AI)}{(AJ)}=\frac{(BI)}{(BJ)}$, alors (AB) est parallèle à (IJ).
- **Chapitre 1 :** Introduction à la configuration géométrique du théorème de Thalès et application pour calculer des longueurs.
- **Chapitre 2 :** Présentation de la réciproque du théorème de Thalès et utilisation pour démontrer que deux droites sont parallèles.
- **Chapitre 3 :** Applications du théorème de Thalès dans des triangles et identification des erreurs courantes.